Mathematik

Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen.

Der Zusammenhang zwischen der Carathéodoryschen Metrik und den Regularitätsbereichen.

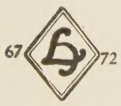
INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität
zu Münster i. Westf.

vorgelegt von

Helmut Horstmann

aus Erfurt.



Gedruckt in der Dissertations-Druckerei Heinr. & J. Lechte / Emsdetten (Westf.)

Tag der mündlichen Prüfung: 31. Mai 1932

Dekan: Herr Prof. Dr. M. Wackernagel

Referent: Herr Prof. Dr. H. Behnke

Bekanntlich ist es in der Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen nicht möglich, eine dem Riemannschen Abbildungssatz entsprechende Aussage zu machen, wonach (unter den üblichen allgemeinen Voraussetzungen) ein beliebiger Bereich des 2n-dimensionalen Raumes der Koordinaten $(x_1,x_2 \ldots x_n,y_1 \ldots y_n)$ durch n analytische Funktionen

$$z'_k = f_k(z_1 \ldots z_n) \qquad \begin{matrix} z_k = x_k + iy_k \\ z'_k = x'_k + iy'_k \end{matrix}$$

auf einen beliebigen anderen Bereich des Raumes mit den Koordinaten $(x'_1 \ldots x'_n,y'_1 \ldots y'_n)$ abbildbar ist.*)

Zum Studium dieser analytischen Abbildungen hat Carathéodory eine (reelle) Metrik 2n-dimensionaler Bereiche untersucht, die gegenüber analytischen Abbildungen der Bereiche invariant ist und in folgender Weise definiert wird[1]):

B sei ein Bereich des 2n-dimensionalen Raumes der n komplexen Veränderlichen $z_1 \ldots z_n$. (f) sei die Familie aller Funktionen $f(z_1 \ldots z_n)$, die in B regulär und absolut genommen kleiner als Eins sind. P und Q seien zwei beliebige innere Punkte aus B. Ist $f(z_1 \ldots z_n)$ irgend eine Funktion aus (f), so stellen ihre Funktionswerte $w_P = f(P)$ und $w_Q = f(Q)$ zwei Punkte aus dem Einheitskreis der w-Ebene dar. Die obere Grenze der nichteuklidischen Entfernungen der Punkte w_P und w_Q für alle Funktionen aus der Familie (f) ist eine endliche Zahl, die wir die Distanz D_B (P,Q) des Punktepaares (P,Q) (in Bezug auf den Bereich B) nennen.

Das Verhalten der so definierten Distanz, die eine stetige Funktion ihrer Argumente P und Q ist, läßt sich in der Umgebung eines beliebigen inneren Punktes aus B durch eine Indikatrix darstellen, die stets ein beschränkter, konvexer Kreisbereich ist[2]). Carathéodory hat nun als notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Abbildbarkeit eines Bereiches B auf einen

---

*) Vgl. für das folgende die in den Math. Ann. 108 (1933) erschienene Arbeit d. Verf. „Carathéodorysche Metrik und Regularitätshüllen"; über diese auch C. Carathéodory „Ueber d. analyt. Abb. v. mehrdimens. Räumen", Vhdlg. d. Intern. Math. Kongr. Zürich (1932), Bd. I, pag. 100.

[1]) Carathéodory, Math. Ann. 97 u. Hamb. Abh. 6.

[2]) Vgl. Anm. 25.

Bereich B' durch analytische Funktionen gefunden, daß die Indikatrizen der beiden Bereiche in entsprechenden Punkten stets komplex affin aufeinander abbildbar sein müssen.

Im Falle der klassischen Funktionentheorie — also $n = 1$ — sind die Indikatrizen Kreise, die sich stets affin aufeinander beziehen lassen. Im Falle $n \geqq 2$ lassen sich die Indikatrizen im allgemeinen nicht mehr affin aufeinander abbilden, d. h. ein dem Riemannschen Abbildungssatz entsprechender Satz kann hier nicht mehr gelten.

Der grundsätzliche Unterschied zwischen den Fällen $n = 1$ und $n \geqq 2$ — also der klassischen Funktionentheorie und der Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlichen — zeigt sich auch in dem Verhalten der Distanzfunktionen in der Umgebung der Randpunkte der Bereiche. Für $n = 1$ wächst die Distanz zweier Punkte P und Q eines beschränkten, einfachzusammenhängenden Bereiches B stets über alle Grenzen, wenn der Punkt P fest bleibt und Q irgendwie gegen den Rand von B konvergiert.

Wesentlich anders ist es im Falle $n \geqq 2$, wie in dieser Arbeit gezeigt werden wird. Die Distanzfunktion eines Bereiches B kann in der Umgebung der Randpunkte von B dann ein sehr verschiedenes Verhalten zeigen, durch das selbstverständlich der Abbildbarkeit des Bereiches weitere Einschränkungen auferlegt werden.

Da die wesentlichen Unterschiede gegenüber der klassischen Funktionentheorie bereits in der Theorie zweier komplexen Veränderlichen auftreten, werden wir uns im folgenden auf den Fall $n = 2$ beschränken[3]).

Unter einem Bereich B werden wir also stets einen Bereich des vierdimensionalen Raumes der beiden komplexen Veränderlichen $w = u + iv$ und $z = x + iy$ verstehen. Da die Distanzfunktion nur in solchen Bereichen definiert ist, in denen es reguläre Funktionen gibt, die beschränkt, aber nicht konstant sind, wollen wir ferner nur Bereiche betrachten, die innerhalb eines Dizylinders

$$|w| < M \quad (z \text{ beliebig}) \quad \text{oder} \quad |z| < M \quad (w \text{ beliebig})$$

liegen.

Im 1. Teil dieser Arbeit wird das Verhalten der Distanzfunktion in der Umgebung der Randpunkte der Bereiche untersucht werden. Wir werden die Randpunkte in Bezug auf die

[3]) Jedoch lassen sich die folgenden Ergebnisse mit Ausnahme von Satz 7 unmittelbar für n Veränderliche aussprechen.

Distanzfunktion in die Klassen der endlichfernen, stetig und unstetig unendlichfernen Randpunkte einteilen und nachweisen, daß keine dieser drei Klassen leer ist.

Es ergeben sich dabei Zusammenhänge mit der Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen, die wir im II. Teil eingehender untersuchen werden.

Im III. Teil werden wir dann die Definition der Distanzfunktion auf die Randpunkte eines Bereiches erweitern und durch Aufstellung einer Abbildungsinvarianten einen allgemeinen Satz über die Starrheit vierdimensionaler Bereiche beweisen.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Die Distanzfunktion in den Randpunkten eines Bereiches.	6
§ 1. Definitionen und einleitende Sätze.	6
§ 2. Bereiche mit unendlichfernen Randpunkten.	9
§ 3. Bereiche mit endlichfernen Randpunkten.	11
II. Normale und nichtnormale Bereiche.	14
§ 1. Zusammenhang mit der Theorie der Regularitätshüllen und Regularitätsbereiche.	14
§ 2. Der Existenzbereich der Distanzfunktion eines Bereiches.	17
§ 3. Die Distanzfunktion der Reinhardtschen Kreiskörper.	19
III. Analytische Abbildungen nichtnormaler Bereiche.	21

I. Die Distanzfunktion in den Randpunkten eines Bereiches.

§ 1.

Definitionen und einleitende Sätze.

Definition 1. B sei ein beliebiger Bereich, P ein Randpunkt dieses Bereiches. P heißt endlichferner Randpunkt von B, wenn es zu jedem (inneren) Punkt Q aus B eine Umgebung U(P) von P und eine positive Zahl M gibt, sodaß die Distanz des Punktes Q von jedem beliebigen Punkt aus B, der in U(P) liegt, stets kleiner als M ist.

Aus dem Dreieckssatz für die Distanzfunktion[4]) und der Endlichkeit der Distanz je zweier inneren Punkte eines Bereiches folgt, daß ein Randpunkt bereits dann endlichfern ist, wenn mindestens ein (innerer) Punkt aus B mit der in Definition 1 verlangten Eigenschaft existiert.

Definition 2. Jeden Randpunkt eines Bereiches B, der nicht endlichfern ist, nennen wir einen unendlichfernen Randpunkt von B.

Ist P ein unendlichferner Randpunkt des Bereiches B, so gibt es also mindestens einen inneren Punkt $Q^{(o)}$ und eine Folge von Punkten $P_n^{(o)}$ aus B, die gegen P konvergieren, sodaß die Folge der Distanzen $D_B(Q^{(o)}, P_n^{(o)})$ mit wachsendem n über alle Grenzen wächst.

Aus dem Dreieckssatz folgt dann, daß nicht nur für $Q^{(o)}$, sondern für jeden Punkt Q aus B die Folge der $D_B(Q, P_n^{(o)})$ nicht beschränkt ist.

Gibt es zu einem unendlichfernen Randpunkt P zugleich eine gegen P konvergierende Folge von Punkten P_n [1]) aus B, sodaß die Folge der Distanzen $D_B(Q, P_n^{(1)})$ unterhalb einer festen Schranke bleibt, so nennen wir P einen unstetig unendlichfernen Randpunkt des Bereiches B. Im anderen Falle heißt P stetig unendlichfern.

---

[4]) Carathéodory, Math. Ann. 97 (1927), pag. 81.

Aus den Definitionen 1 und 2 und den allgemeinen Eigenschaften der Distanzfunktion ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

Satz 1. Ein Randpunkt P eines Bereiches B ist dann und nur dann unendlichfern, wenn es mindestens eine gegen P konvergierende Folge von Punkten P_n aus B gibt und eine Folge von Funktionen $f_n(w,z)$, die in B regulär und absolut genommen kleiner als Eins sind ,sodaß die Folge der $f_n(w,z)$ keine gegen die Konstante Eins konvergierende Teilfolge enthält und

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \; |f_n(P_n)| = 1 \tag{1}$$

Beweis 1.) Für den Randpunkt P, die gegen P konvergierende Punktefolge P_n und die Funktionenfolge $f_n(w,z)$ seien die Bedingungen des Satzes erfüllt. Ferner sei Q ein beliebiger innerer Punkt aus B. Bildet man dann die Funktionen

$$h_n(w,z) = \frac{f_n(w,z) - f_n(Q)}{f_n(w,z)\,\overline{f_n(Q)} - 1}$$

so verschwinden diese sämtlich im Punkt Q und sind gleichfalls in B regulär und absolut genommen kleiner als Eins.

Da die Folge der $f_n(w,z)$ keine gegen die Konstante Eins konvergierende Teilfolge enthält, ist

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \; |f_n(Q)| < 1 \; [5])$$

Deswegen und wegen (1) ist

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \; |h_n(P_n)| = 1 \tag{2}$$

Nun ist [6])

$$D_B(Q,P_n) = \text{obere Grenze von } \frac{1}{2} \log \frac{1 - |g(P_n)|}{1 + |g(P_n)|}$$

für alle Funktionen g(w,z), die in B regulär und absolut genommen kleiner als Eins sind und im Punkt Q verschwinden. Es ist also

$$D_B(Q,P_n) \geqq \frac{1}{2} \log \frac{1 + |h_n(P_n)|}{1 - |h_n(P_n)|}$$

und daher nach (2) nicht beschränkt. Demnach ist P ein unendlichferner Randpunkt von B.

Hiermit ist gezeigt, daß die Bedingungen des Satzes hinreichend sind.

---

[5]) Folgt aus dem Satz von Maximum. Vgl. auch 4), pag. 80.

[6]) Vgl. 4), pag. 80.

2.) P sei ein unendlichferner Randpunkt von B. Dann existiert mindestens eine gegen P konvergierende Folge von Punkten P_n aus B und zu jeden P_n eine Funktion $h_n(w,z)$, die in B regulär und absolut genommen kleiner als Eins ist und in einem vorgegebenen Punkt Q verschwindet, sodaß die Distanzen

$$D_B(Q,P_n) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |h_n(P_n)|}{1 - |h_n(P_n)|}$$

sind und mit wachsendem n über alle Grenzen wachsen.

Das ist nur möglich, falls

$$\lim_{n=\infty} |h_n(P_n)| = 1$$

Da ferner alle $h_n(w,z)$ in A verschwinden, kann keine Teilfolge gegen die Konstante Eins konvergieren. Die Folge der $h_n(w,z)$ hat also die verlangten Eigenschaften, w.z.b.w.

Wie man unmittelbar sieht, gilt der

Satz 2. Ein Randpunkt eines Bereiches B ist dann und nur dann stetig unendlichfern, wenn man zu jeder gegen P konvergierenden Folge von Punkten P_n aus B eine Folge von Funktionen $f_n(w,z)$ finden kann, die in B regulär und absolut genommen kleiner als Eins sind, sodaß die Folge der $f_n(w,z)$ keine gegen die Konstante Eins konvergierende Teilfolge enthält und

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |f_n(P_n)| = 1$$

Folgerung. Ein Randpunkt P eines Bereiches B ist dann und nur dann endlichferner Randpunkt von B, wenn es zu jeder Folge von Funktionen $f_n(w,z)$, die in B regulär und absolut genommen kleiner als Eins sind und die keine gegen die Konstante Eins konvergierende Teilfolge enthält, und zu jeder gegen P konvergierenden Punktefolge P_n aus B ein $0 < \vartheta < 1$ gibt, sodaß

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |f_n(P_n)| \leqq \vartheta < 1$$

Satz 3. Ein Häufungspunkt von unendlichfernen Randpunkten eines Bereiches ist wieder ein unendlichferner Randpunkt.

Beweis. P sei Randpunkt des Bereiches B und Häufungspunkt der unendlichfernen Randpunkte P_n von B. Zu jedem Randpunkt P_n gibt es eine Folge von Punkten Q_{nm} aus B, die gegen P_n konvergieren, und eine Folge von Funktionen $f_{nm}(w,z)$, die in B regulär und absolut genommen kleiner als Eins sind und in einem beliebig vorgegebenen, festen Punkt Q aus B verschwinden, sodaß

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \; |f_{nm}(Q_{nm})| = 1 \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

Dann läßt sich aber sicherlich aus der Menge der Q_{nm} eine gegen P konvergierende Teilfolge Q_k so auswählen, daß für die Folge der zugehörigen Funktionen $f_k(w,z)$

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \; |f_k(Q_k)| = 1$$

Da die $f_k(w,z)$ alle in Q verschwinden, kann keine Teilfolge gegen die Konstante Eins konvergieren. Also ist nach Satz 1 der Punkt P ein unendlichferner Randpunkt des Bereiches B.

Unmittelbar aus Satz 2 folgt der

Satz 4[7]). B' sei ein Teilbereich von B. Ist der stetig unendlichferne Randpunkt P von B zugleich Randpunkt von B', so ist P auch stetig unendlichferner Randpunkt dieses Bereiches.

§ 2.

Bereiche mit unendlichfernen Randpunkten.

Zunächst seien zwei Bereiche — der Dizylinder und die Hyperkugel — angegeben, die nur stetig unendlichferne Randpunkte besitzen.

Carathéodory hat bereits die Distanzfunktionen dieser beiden Bereiche untersucht[8]). Sei $P_o(w_o, z_o)$ ein beliebiger innerer Punkt des Dizylinders

(D) $\qquad |w| < 1 \qquad |z| < 1$

und O(0,0) der Koordinatenanfangspunkt, so ist $D_D(O,P)$ gleich der größeren der beiden Zahlen

$$(3) \qquad \log \frac{1 + |w_o|}{\sqrt{1 - w_o\bar{w}_o}} \quad \text{und} \quad \log \frac{1 + |z_o|}{\sqrt{1 - z_o\bar{z}_o}}$$

Für die Hyperkugel

(H) $\qquad w\bar{w} + z\bar{z} < 1$

gilt entsprechend

$$(4) \qquad D_H(O,P) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{w_o\bar{w}_o + z_o\bar{z}_o}}{1 - \sqrt{w_o\bar{w}_o + z_o\bar{z}_o}}$$

Aus (3) und (4) folgt unmittelbar, daß, falls der Punkt P gegen den Rand von D bzw. H konvergiert, die Distanz $D_D(O,P)$

[7]) Vgl. auch 4), pag. 81.
[8]) Vgl. 4), pag. 83 u. 90.

bzw. $D_H(O,P)$ stets über alle Grenzen wächst, d. h., wie verlangt. jeder Randpunkt des Dizylinders bzw. der Hyperkugel ist stetig unendlichfern.

Ebenso läßt sich leicht zeigen, daß alle Randpunkte eines konvexen Bereiches stetig unendlichfern sind. Man kann nämlich durch jeden Randpunkt eines konvexen Bereiches einen dreidimensionalen Stützraum legen und daher leicht zu jeder gegen diesen Punkt konvergierenden Folge von inneren Punkten des Bereiches eine Folge von Funktionen angeben, die den Bedingungen des Satzes 2 genügt.

Da man zu jedem beliebigen Bereich mindestens einen Randpunkt angeben kann, durch den es einen derartigen Stützraum gibt[9]), folgt ferner

Satz 5. Jeder Bereich hat mindestens einen stetig unendlichfernen Randpunkt.

Gibt es auch Bereiche mit unstetig unendlichfernen Randpunkten?

Hierzu betrachten wir das folgende Beispiel: Gegeben sei der Hartogssche Körper

$(K_o) \qquad |z| < 1 \qquad |w| < |z|$

Der Rand von K_o wird von den beiden Hyperflächen

$(H_1) \quad |z| = 1$ und $(H_2) \quad |w| = |z|$

gebildet.

Alle Randpunkte von K_o, die auf H_1 liegen, sind stetig unendlichfern, weil sie gleichzeitig Rundpunkte des K_o umfassenden Einheitsdizylinders sind (vgl. Satz 4).

Ebenso sind mit Ausnahme des Punktes (O,O) alle Randpunkte, die auf H_2 liegen, stetig unendlichfern, da die Funktionen

$$g(w,z) = \frac{w}{z} e^{it} \qquad (t \text{ reell}, \; O \leqq t \leqq 2\pi)$$

die in K_o absolut genommen kleiner als Eins sind, in diesen Punkten (bei geeigneter Wahl von t) den Funktionswert Eins haben.

Betrachten wir nunmehr den Punkt (O,O). Wir behaupten, daß für jeden gegen (O,O) konvergierende Folge von Punkten

---

[9]) Denn wir untersuchen nur Bereiche, die innerhalb eines Dizylinders $|w| \leq M$ (z beliebig) oder $|z| < M$ (w beliebig) liegen.

[10]) Ein Hartogsscher Körper ist ein Bereich, der die Transformationen $w'=w,z'=ze^{i\vartheta}$ bzw. $z'=z,w'=we^{i\vartheta}$ in sich gestattet. (Dabei haben wir als Mittelpunkt des Körpers den Nullpunkt angenommen, was keine Einschränkung bedeutet).

P_n aus K_o, die auf der Ebene $w = O$ liegen, und für jeden beliebigen inneren Punkt Q aus K_o die Folge der Distanzen $D_{K_o}(Q,P_n)$ beschränkt ist, wenn n unbegrenzt wächst und Q fest bleibt.

Die Ebene $w = O$ hat mit K_o den Einheitskreis mit Ausnahme des Nullpunktes gemeinsam. Ist nun f(w,z) in K_o regulär und absolut genommen kleiner als Eins, so ist die Funktion

$$g(z) = f(O,z)$$

auf der Ebene $w = O$ im punktierten Einheitskreis regulär und absolut genommen kleiner als Eins. Nach einem bekannten Satz der klassischen Funktionentheorie ist g(z) also auch noch im Nullpunkt regulär und beschränkt, und damit ist die Familie der Funktionen g(z) im ganzen Einheitskreis normal[11]).

Ist demnach $g_n(z)$ irgend eine konvergente Teilfolge dieser Familie, die nicht gegen die Konstante Eins konvergiert, so muß $|g_n(O)| \leqq \vartheta < 1$ für alle n sein[12]).

Hieraus folgt unmittelbar, daß, falls P_n eine beliebige gegen (O,O) konvergierende Folge von Punkten aus der Ebene $w = O$ ist und Q irgend ein Punkt aus K_o, die Folge der Distanzen $D_{K_o}(O,P_n)$ beschränkt ist. Der Nullpunkt kann also kein stetig unendlichferner Randpunkt von K_o sein.

Als Häufungspunkt von stetig unendlichfernen Randpunkten ist (O,O) sicherlich auch kein endlichferner Randpunkt (vgl. Satz 3). Also ist (O,O) ein unstetig unendlichferner Randpunkt des Bereiches K_o.

§ 3.

Bereiche mit endlichfernen Randpunkten.

Ein einfaches Beispiel eines Bereiches mit endlichfernen Randpunkten hat bereits Carathéodory angegeben[13]).

Wir betrachten den Reinhardtschen Kreiskörper[14])

(K_1) $\qquad |z| < 1 \qquad 2|w| - |z| < 1$

[11]) Bekanntlich bilden die g(z) eine im Einheitskreis der w-Ebene normale Familie regulärer Funktionen, d. h. aus jeder Teilfolge der g(z) kann man eine im Einheitskreis gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergente Teilfolge aussondern.

[12]) ϑ ist von der Teilfolge $g_n(z)$ unabhängig. Vgl. auch 2).

[13]) Carathéodory, Hamb. Abh. 6 (1928), pag. 96—145, vgl. pag. 122.

[14]) Ein Reinhardtscher Kreiskörper ist ein Bereich, der die Transformationen $w' = we^{i\vartheta}$, $z' = ze^{i\varphi}$ in sich zuläßt. Der Mittelpunkt (O,O) ist in dieser Arbeit als innerer Punkt des Körpers angenommen worden.

Da nach einem bekannten Satz von Hartogs[15]) alle in K_1 regulären und beschränkten Funktionen noch in dem Einheitsdizylinder

$$(D) \qquad |z| < 1 \qquad |w| < 1$$

regulär sind und dort keine anderen Werte als in K_1 annehmen, stimmen die Distanzfunktionen dieser beiden Bereiche überein, d. h. sind P und Q zwei Punkte aus K_1 (die dann also auch in D liegen), so ist

$$D_{K_1}(P,Q) = D_D(P,Q)$$

Folglich sind alle Randpunkte von K_1, die nicht auf der Hyperfläche $|z| = 1$ liegen, endlichfern, weil sie zugleich innere Punkte von D sind.

Es zeigt sich also: die endlichfernen Randpunkte von K_1 haben die Eigenschaft, daß jede in K_1 reguläre Funktion noch in diesen Punkten regulär ist. In jedem unendlichfernen Randpunkt von K_1 wird dagegen mindestens eine in diesem Bereich reguläre Funktion singulär.

Wir zeigen nun, daß allgemein jeder unendlichferne Randpunkt eines beliebigen Bereiches diese Eigenschaft hat.

Satz 6. B sei ein Bereich, P ein unendlichferner Randpunkt von B. Dann gibt es eine in B reguläre Funktion, die in P singulär wird.

Beweis. P sei unendlichferner Randpunkt des Bereiches B. Dann gibt es also eine gegen P konvergierende Folge von Punkten P_n aus B und eine Folge von Funktionen $f_n(w,z)$, die in B regulär und absolut genommen kleiner als Eins sind und in einem beliebig vorgegebenen, festen Punkt Q aus B verschwinden, sodaß

$$\lim_{n=\infty} |f_n(P_n)| = 1$$

B_k sei eine Folge von abgeschlossenen, ganz im Inneren von B liegenden Bereichen, die gegen B konvergieren und Q als inneren Punkt enthalten. Wir können dabei annehmen, daß B_1 ganz von B_2 umfaßt wird, dieser Bereich wieder ganz von B_3 usf.

Nun kann man zu jedem Bereich B_k eine positive Zahl M_k finden, sodaß für alle Funktionen g(w,z), die in B regulär und absolut genommen kleiner als Eins sind und in Q verschwinden, der Ausdruck

---

[15]) Vgl. Hartogs, Math. Ann. 62.

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + |g(S)|}{1 - |g(S)|} < M_k \text{ [16]}$$

ist für alle Punkte S aus B_k, d. h. es ist

$$\text{Maximum von } |g(w,z)| \text{ in } B_k \leqq \vartheta_K = \frac{e^{2M_k} - 1}{e^{2M_k} + 1} < 1$$

Wählen wir dann aus der Folge der Bereiche B_k eine Teilfolge B_{k_n} so aus, daß für die zugehörigen ϑ_{k_n} die Ungleichung

$$|f_n(P_n)| > \vartheta_{k_n}$$

erfüllt ist, so ist

$$|f_n(P_n)| > \text{Maximum von } |f_n(w,z)| \text{ in } B_{kn}$$

und das Produkt

$$F(w,z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left(\frac{f_n(w,z)}{f_n(P_n)} \right)^{a_n} \right\}$$

— wobei die positiven Zahlen a_n so gewählt werden, daß für alle (w,z) aus B_{k_n}

$$|f_n(w,z)|^{a_n} < \frac{1}{n^2} |f_n(P_n)|^{a_n} \quad \text{ist} -$$

konvergiert gleichmäßig in jedem abgeschlossenen inneren Teilbereich von B und stellt eine dort reguläre Funktion dar. F(w,z) verschwindet auf den (wenigstens bis auf endlich viele) voneinander verschiedenen analytischen Flächen

$$f_n(w,z) = f_n(P_n),$$

die sich von innen gegen P häufen. Nach dem Weierstrasschen Vorbereitungssatz ist dann f(w,z) in P wesentlich singulär, w.z.b.w.

Bekanntlich kann eine in einem Bereiche B reguläre Funktion nur dann in einem Randpunkt P von B singulär werden, wenn der Rand von B in P bestimmten Bedingungen genügt. Diese sind von E. E. Levi[17] angegeben worden. Aus den Levischen Sätzen folgt daher unmittelbar der

Satz 7. $P_o(w_o,z_o)$ sei unendlichferner Randpunkt des Bereiches B. In der Umgebung von P_o werde die Randmannigfaltigkeit von B durch eine nach allen Veränderlichen zweimal differenzierbare Funktion

$$\varphi(w,\bar{w},z,\bar{z}) = 0$$

dargestellt.

---

[16]) d. h. M_k ist das Maximum der Distanzen aller Punkte aus B_k von Q.

[17]) E. E. Levi, Ann. di mat. 17, 18. Vgl. auch Wirtinger, Math. Ann. 97, pag. 362.

Gilt für jeden Punkt (w_1,z_1) aus B, der in der Umgebung von P_0 liegt, die Ungleichung

$$\varphi(w_1,\bar{w}_1,z_1,\bar{z}_1) \geq 0$$

so muß die Levische Differentialbedingung

$$L(\varphi) \leqq 0$$ [17])

erfüllt sein.

II. Normale und nichtnormale Bereiche.

§ 1:

Zusammenhang mit der Theorie der Regularitätsbereiche und Regularitätshüllen.

Unter einem Regularitätsbereich verstehen wir einen genauen Existenzbereich einer regulären Funktion, d. h. einen Bereich, in dem es mindestens eine Funktion gibt, die in den inneren Punkten des Bereiches regulär und über seinen Rand nicht fortsetzbar ist.

B sei ein beliebiger Bereich. Der Durchschnitt aller Regularitätsbereiche, die B umfassen, heißt die Regularitätshülle H(B) von B. H(B) ist wieder ein Regularitätsbereich, und jede in B reguläre Funktion ist noch in H(B) regulär[18]).

Die Distanzfunktion von B wird durch die Familie der dort regulären und gleichmäßig beschränkten[19]) Funktionen definiert. Nun ist nach einem Satz von P. Thullen[20]) jede Funktion, die in B absolut genommen kleiner als Eins und regulär ist, noch in H(B) absolut genommen kleiner als Eins, d. h. die Distanzfunktionen von B und H(B) werden durch die gleiche Menge von Funktionen definiert. Es gilt dementsprechend der

Satz 8. B sei ein beliebiger Bereich, H(B) die Regularitätshülle von B. P und Q seien zwei beliebige innere Punkte aus B. Dann ist

$$D_B(P,Q) = D_{H(B)}(P,Q)$$

Ist also P ein Randpunkt von B und zugleich innerer Punkt von H(B), so ist P ein endlichferner Randpunkt des Bereiches B. Daher gilt

---

[18]) Cartan-Thullen, Math. Ann. 106.

[19]) d. h. ist $f(w,z)$ eine Funktion der Familie, so ist $|f(w,z)| < M$ für alle (w,z) aus B, und M ist unabhängig von der Funktion $f(w,z)$.

[20]) Thullen, Math. Ann. 106.

Satz 9. P sei unendlichferner Randpunkt des Bereiches B. Dann liegt P auf dem Rande der Regularitätshülle H(B).

Im allgemeinen wird also ein beliebiger Bereich endlichferne Randpunkte besitzen. Ein Bereich, dessen Randpunkte sämtlich unendlichfern sind, ist nach Satz 9 sicher ein Regularitätsbereich.

Gilt nun auch die Umkehrung, daß jeder Regularitätsbereich ein Bereich ist, dessen Randpunkte sämtlich unendlichfern sind? Wir behaupten, daß jeder Regularitätsbereich mindestens Grenzbereich von Teilbereichen ist, die nur unendlichferne — und sogar stetig unendlichferne! — Randpunkte aufweisen.

Um die folgenden Sätze besser formulieren zu können, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Definition 3. Ein Bereich, dessen Randpunkte sämtlich stetig unendlichfern sind, heißt ein normaler Bereich. Einen Bereich, der kein normaler Bereich ist, nennen wir einen nichtnormalen Bereich.

Für normale Bereiche gilt also der

Satz 10. Jeder normale Bereich ist ein Regularitätsbereich.

Zum Beweis der Umkehrung dieses Satzes werden wir einen Satz von H. Cartan und P. Thullen benutzen[21]). Um diesen Satz einfacher aussprechen zu können, wollen wir sagen:

Ein Bereich B heißt K-konvex, wenn es zu jedem abgeschlossenen, ganz im Innern von B liegenden Bereich B_0 einen abgeschlossenen, ebenfalls ganz im Inneren von B liegenden Bereich B_0' gibt und zu jedem Punkt P aus B, der außerhalb von B_0' liegt, eine in B reguläre Funktion f(w,z), sodaß

$$|f(P)| > \text{Maximum von } |f(w,z)| \text{ in } B_0$$

Der Satz von Cartan-Thullen sagt nun aus, daß ein Bereich dann und nur dann ein Regularitätsbereich ist, wenn er K-konvex ist.

Satz 11. B sei ein Regularitätsbereich. Dann ist B ein normaler Bereich, oder es gibt wenigstens eine Folge von normalen Bereichen, die Teilbereiche von B sind und gegen B konvergieren.

Beweis. B_0 sei ein beliebiger, abgeschlossener und ganz im Innern von B liegender Bereich. Der Bereich ist ein Regularitätsbereich. Also ist er K-konvex und man kann einen B_0

[21]) Vgl. Anm. 18.

umfassenden, ganz im Innern von B liegenden Bereich B_0^* finden, der folgende Eigenschaften hat:

Zu jedem Randpunkt P von B_0^* gibt es eine in B reguläre Funktion f(w,z) und eine Umgebung U(P), sodaß für jeden Punkt Q aus U(P) gilt

$$|f(Q)| > \text{Maximum von } |f(w,z)| \text{ in } B_0$$

Nach dem Ueberdeckungssatz von Heine-Borel können wir dann eine endliche Zahl von Funktionen $f_1(w,z) \ldots f_n(w,z)$ finden, sodaß in jedem Randpunkt von B_0^* mindestens eine dieser Funktionen einen Funktionswert hat, der absolut genommen größer ist als das Maximum des Absolutbetrages der Funktion in B_0.

B_0'' sei der größte Bereich, in dem keine dieser Funktionen einen größeren Absolutbetrag erreicht als in B_0. B_0'' ist also ein Bereich, der B_0 umfaßt und ganz im Innern von B_0^* und daher auch im Innern von B liegt.

P sei ein beliebiger Randpunkt von B_0''. Dann gibt es sicherlich eine Funktion f(w,z), die in B_0'' absolut genommen kleiner als M ist und im Punkte P den Absolutbetrag M ihres Funktionswertes hat. Durch Multiplikation mit 1/M erhalten wir eine Funktion, die in B_0'' absolut genommen kleiner als Eins ist und für die $|f(P)| = 1$ gilt. Daraus folgt unmittelbar, daß P ein stetig unendlichferner Randpunkt von B_0'' ist.

Ebenso ist jeder andere Randpunkt von B_0'' stetig unendlichfern, d. h. B_0'' ist ein normaler Bereich.

Wir haben gezeigt, daß wir jedem abgeschlossenen, ganz im Inneren von B liegenden Bereich B_0 einen ebenfalls ganz im Inneren von B liegenden, abgeschlossenen Bereich B_0'' zuordnen können, der normal ist und B_0 umfaßt.

Ist nun B_n eine Folge von abgeschlossenen, ganz im Inneren von B liegenden Bereichen, die gegen B konvergieren, so konvergiert die Folge der zugehörigen normalen Bereiche B_n'' ebenfalls gegen B, d. h. wie verlangt, B ist Grenzbereich von normalen Bereichen, die im Inneren von B liegen.

Wir können aber nicht zeigen, daß der Regularitätsbereich B selbst ein normaler Bereich ist. Hierzu folgendes Beispiel:

Der Hartogssche Bereich

$$(K_0) \quad |z| < 1 \quad |w| < |z|$$

ist sicher ein Regularitätsbereich, denn alle Randpunkte von K_0 sind unendlichfern. K_0 ist aber kein normaler Bereich, wie

bereits früher gezeigt worden ist (vgl. I, § 2). Denn der Nullpunkt ist kein stetig unendlichferner Randpunkt des Bereiches.

§ 2:

Der Existenzbereich der Distanzfunktion eines Bereiches.

Definition 4. B sei ein beliebiger Bereich. Der größte Bereich, in dem alle in B regulären Funktionen, die dort absolut genommen kleiner als Eins sind, ebenfalls noch diese Eigenschaften haben, heißt der Existenzbereich der Distanzfunktion des Bereiches B[22]).

Der Existenzbereich der Distanzfunktion eines beliebigen Bereiches ist sicherlich stets ein Regularitätsbereich. Ist nun die Regularitätshülle eines Bereiches zugleich der Existenzbereich seiner Distanzfunktion?

Um auf einfache Weise zeigen zu können, daß unter gewissen Voraussetzungen jeder Regularitätsbereich der Existenzbereich seiner Distanzfunktion ist, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

B sei ein beliebiger Bereich und $H_o(B)$ der Durchschnitt aller B ganz in ihrem Inneren enthaltenden Regularitätsbereiche, dann gilt

$$H_o(B) \geqq H(B)$$

Ist der Bereich $H_0(B)$ nicht identisch mit der Regularitätshülle von B, so nennen wir $H_0(B)$ die Nebenhülle des Bereiches B. Wir sagen dann, B besitzt eine Nebenhülle.

Satz 12. B sei ein Bereich, der keine Nebenhülle besitzt. Dann ist die Regularitätshülle von P zugleich der Existenzbereich der Distanzfunktion von B[22]).

Beweis.

Für einen beliebigen, B ganz in seinem Inneren enthaltenden Regularitätsbereich R können wir eine in R reguläre Funktion angeben, die überall auf dem Rand von R singulär ist. Diese Funktion ist in B regulär und beschränkt und daher gemäß

---

[22]) Der Existenzbereich der Distanzfunktion eines schlichten Bereiches braucht nicht notwendig schlicht zu sein. Vgl. 20). Für das folgende ist dies jedoch unwesentlich.

Definition 4 auch noch in dem Existenzbereich der Distanzfunktion von B, den wir mit B^* bezeichnen, regulär. Daher gilt

$$B^* \leqq R$$

und somit

$$B^* \leqq H_0(B)$$

Ferner ist sicher (vgl. Satz 8)

$$H(B) \leqq B^*$$

Nun ist B ein Bereich ohne Nebenhülle, d. h. es ist

$$H(B) = H_0(B)$$

woraus unmittelbar folgt, daß

$$H(B) = B^* \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Bereiche ohne Nebenhüllen[23]) sind sicher alle stetig sternartigen[24]) Bereiche (wie z. B. die Regularitätshüllen beschränkter Kreiskörper[25]).

Satz 12a. Der Bereich B sei ein stetig sternartiger[24]) Bereich. Dann ist die Regularitätshülle von B zugleich der Existenzbereich der Distanzfunktion des Bereiches B.

Anmerkung. Die Umkehrung des Satzes 12 gilt nicht; d. h. ist B ein Bereich mit Nebenhülle, so ist nicht notwendig der Existenzbereich der Distanzfunktion von B von der Regularitätshülle des Bereiches verschieden. Zum Beispiel hat der Hartogssche Bereich

$$(K_0) \qquad |z| < 1 \qquad |w| < |z|$$

als Nebenhülle den Einheitszylinder

$$(D) \qquad |z| < 1 \qquad |w| < 1$$

wie unmittelbar aus einem Satz von Hartogs folgt. (vgl. Anm. 12)

Der Existenzbereich der Distanzfunktion von K_0 ist aber die Regularitätshülle von K_0 — nämlich der Bereich K_0 selbst.

---

[23]) Vgl. auch eine demnächst erscheinende Arbeit von Behnke und Thullen. (S. Literaturverzeichnis).

[24]) B heißt stetig sternartig, wenn er beschränkt ist und wenn es einen Punkt P aus B gibt, sodaß jedes Geradenstück, das P mit einem Randpunkt des Bereiches verbindet, nur aus Punkten von B besteht.

[25]) Ein Kreiskörper ist ein Bereich, der die Transformationen $w' = we^{i\vartheta}$, $z' \leqq ze^{i\vartheta}$ in sich gestattet. Der Mittelpunkt (O,O) ist innerer Punkt des Körpers.

§ 3:

Die Distanzfunktion der Reinhardtschen Kreiskörper.

Unter den Bereichen des R_4 sind die Reinhardtschen Kreiskörper[26]) funktionentheoretisch ausgezeichnet als die Bereiche, deren Regularitätshüllen die Bereiche der absoluten Konvergenz von Doppelreihen

$$\sum_{m=o}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} a_{mn} (w-w_o)^m (z-z_o)^n$$

sind. Wir werden zeigen, daß sich das Verhalten der Distanzfunktion eines Reinhardtschen Kreiskörpers in der Umgebung seiner Randpunkte besonders einfach beschreiben läßt. Wir behaupten:

Satz 13[27]). K sei ein Reinhardtscher Kreiskörper. H(K) die Regularitätshülle von K. P sei ein beliebiger Randpunkt des Bereiches K. Dann ist P stets endlichfern, wenn er innerer Punkt von H(K), stets stetig unendlichfern, wenn er Randpunkt von H(K) ist.

Folgerung. Ein Reinhardtscher Kreiskörper kann keine unstetig unendlichfernen Randpunkte besitzen.

Zum Beweis von Satz 13 zeigen wir:

Satz 14. Ein Reinhardtscher Kreiskörper ist dann und nur dann ein normaler Bereich, wenn er ein Regularitätsbereich ist.

Beweis.

1. Ist der Reinhardsche Kreiskörper K ein normaler Bereich, so ist er nach Satz 10 sicher auch ein Regularitätsbereich.

2. Der Reinhardtsche Kreiskörper K sei ein Regalaritätsbereich, also der genaue Existenzbereich einer regulären Funktion F(w,z). Die Reihenentwicklung von F(w,z) (um den Mittelpunkt von K) konvergiert in jedem inneren Punkt von K, aber nicht mehr über den Rand von K hinaus. Also ist K genauer Bereich der absoluten Konvergenz einer Doppelreihe.

Dann gibt es aber zu jedem Randpunkt $P_0(w_0,z_0)$ von K eine Hyperfläche

$$|w|\,|z|^a = |w_o|\,|z_o|^a \qquad a > 0$$

sodaß alle Punkte aus K auf der Seite

$$|w|\,|z|^a < |w_o|\,|z_o|^a$$

liegen[28]).

---

[26]) Vgl. Anm. 14.
[27]) Man beachte für die Sätze dieses § 3 Anm. 9!
[28]) Vgl. Anm. 15.

Ist $\lambda > 0$ irgend eine ganze Zahl, so ist auch für alle Punkte aus K

$$|w|^{\lambda}|z|^{\lambda a} < |w_o|^{\lambda}|z_o|^{\lambda a} \tag{5}$$

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, daß K innerhalb eines Dizylinders $|z| \leq 1$ (w beliebig) liegt[29]). Dann ist wegen (5) auch

$$|w|^{\lambda}|z|^{[\lambda a]} < |w_o|^{\lambda}|z_o|^{\lambda a}$$

für alle Punkte aus K, wenn $[\lambda a]$ die kleinste ganze Zahl ist, die größer oder gleich λa ist.

Also ist die Funktion

$$f_{\lambda}(w,z) = \frac{w^{\lambda} \cdot z^{[\lambda a]}}{|w_o|^{\lambda} \cdot |z_o|^{\lambda a}}$$

in K regulär und absolut genommen kleiner als Eins und es ist

$$f_{\lambda}(w_o, z_o)| = |z.|^{[\lambda a] - \lambda a}$$

Entweder ist a eine rationale Zahl. Dann gibt es stets ein λ_o sodaß

$$[a\lambda_o] = a\lambda_o$$

also

$$|f_{\lambda_o}(w_o, z_o)| = 1$$

Dann ist aber P_0 ein stetig unendlichferner Randpunkt von K.

Oder a ist eine irrationale Zahl. Dann gibt es nach einem bekannten Satz eine Folge von ganzen Zahlen λ_i, sodaß

$$\lim_{i=\infty} \{[\lambda_i a] - \lambda_i a\} = 0$$

also

$$\lim_{i=\infty} |f_{\lambda_i}(w_o, z_o)| = 1$$

Da die $f_{\lambda_i}(w,z)$ alle im Nullpunkt verschwinden, kann keine Teilfolge gegen die Konstante Eins konvergieren. Die Bedingungen des Satzes 2 sind daher sämtlich erfüllt, d. h. wie verlangt, $P_0(w_0,z_0)$ ist ein stetig unendlichferner Randpunkt von K.

Also ist jeder Randpunkt von K stetig unendlichfern und K ein normaler Bereich, w. z. b. w.

Damit haben wir zugleich den Satz 13 bewiesen. Auch kann ein Reinhardtscher Kreiskörper K keine unstetig unendlichfernen Randpunkte besitzen, denn diese müßten auf dem Rande der

[29]) Vgl. Anm. 9.

Regularitätshülle von K liegen. Diese ist aber ein Regularitätsbereich und kann daher, wie wir gezeigt haben, keine unstetig unendlichfernen Randpunkte besitzen.

III. Analytische Abbildungen nichtnormaler Bereiche.

Die Distanzfunktion eines Bereiches B ist invariant gegenüber allen analytischen Abbildungen dieses Bereiches auf einen Bereich B' des (w',z') — Raumes durch ein Paar analytischer Funktionen

$$w' = f(w,z)$$
$$z' = g(w,z)$$

D. h. sind P und Q zwei beliebige innere Punkte aus B, P' und Q' die Bildpunkte von P und Q in B', so gilt stets

$$D_B(P,Q) = D_{B'}(P',Q')$$

Es ist zu erwarten, daß die Eigenschaft eines Bereiches, normal zu sein, ebenfalls gegenüber analytischen Abbildungen invariant ist.

Satz 15. B sei ein beliebiger Bereich, B' ein Bereich, der durch eine eindeutige und analytische Abbildung auf B abgebildet werden kann. Ist B ein normaler Bereich, so ist auch B' normal; ist B nichtnormal, so ist B' ebenfalls nichtnormal.

Beweis. P sei ein beliebiger innerer Punkt aus B, P' der Bildpunkt von P in B'. B sei ein normaler Bereich. Um zu beweisen, daß B' ebenfalls normal ist, genügt es offenbar zu zeigen, daß man zu jedem noch so großen positiven M einen abgeschlossenen, ganz im Inneren von B' liegenden Teilbereich B_0' finden kann, sodaß alle Punkte aus B', die außerhalb von B_0' liegen, von P' aus eine größere Distanz als M haben. —

Nun gibt es sicher in B zu jedem M einen abgeschlossenen, ganz im Inneren von B liegenden Bereich B_0, sodaß die Distanz aller Punkte aus B, die außerhalb dieses Bereiches liegen, von P eine größere Distanz als M haben. Dann ist der Bildbereich B_0' von B_0 (in B') ebenfalls ein abgeschlossener, ganz im Inneren von B' liegender Bereich, und alle Punkte aus B', die außerhalb von B_0' liegen, haben von P' eine größere Distanz als M — wie aus der Invarianz der Distanzfunktion gegenüber analytischen Abbildungen unmittelbar folgt.

B' ist also ein normaler Bereich, und wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung gilt natürlich auch die Umkehrung.

Wegen der Invarianz der Distanzfunktion gegenüber analytischen Abbildungen werden insbesondere die nichtnormalen Bereiche eine gewisse Starrheit gegenüber analytischen Abbildungen aufweisen. Da die Abbildungsfunktionen auf dem Rande der Bereiche nicht mehr regulär zu sein brauchen, können wir nicht allgemein aussagen, daß bei Abbildungen endlichferne Randpunkte wieder in endlichferne Randpunkte übergehen müssen usw. Trotzdem können wir eine wichtige, von den Randpunkten eines Bereiches abhängige Invariante gegenüber analytischen Abbildungen des Bereiches angeben.

Dazu erweitern wir die Definition der Distanz zweier Punkte eines Bereiches auch auf die Randpunkte des Bereiches.

P und Q seien zwei beliebige, innere oder Randpunkte eines Bereiches B. U(P) und U(Q) seien beliebige Umgebungen von P und Q. Die untere Grenze der Distanzen aller Punkte aus U (P), die im Inneren von B liegen, von allen Punkten aus U(Q), die innere Punkte aus B sind, ist eine endliche Zahl d.

d hängt von den Umgebungen U(P) und U(Q) ab. Lassen wir diese Umgebungen sich gegen die Punkte P und Q zusammenziehen, so haben die zugehörigen Zahlen d einen unteren Limes d_0. Man sieht leicht, daß d_0 unabhängig ist davon, wie sich die Umgebungen U(P) und U(Q) gegen P und Q häufen.

Sind P und Q zwei innere Punkte aus B, so ist $d_0 = D_B(P,Q)$. Wir werden nun allgemein — also auch, falls P und Q Randpunkte sind — die Zahl d_0 als die Distanz $D_B(P,Q)$ der beiden Punkte P und Q bezeichnen.

Definition. 5. Die untere Grenze der Distanzen aller Randpunkte eines Bereiches B von einem inneren Punkt P aus B bezeichnen wir als die minimale Randdistanz des Punktes P.

Satz 16. B sei ein beliebiger Bereich, B' ein Bereich, der durch eine eineindeutige und analytische Transformation auf B abbildbar ist. P sei ein beliebiger Punkt aus B, P' sein Bildpunkt in B'. Dann haben P und P' die gleichen minimalen Randdistanzen.

Beweis. Die minimale Randdistanz von P sei d; die minimale Randdistanz von P' sei d'. Dann müssen wir zeigen, daß $d = d'$.

Es sei $d > d'$. Dann gibt es ein $a > 0$, sodaß d noch größer ist als $d'-a$. B_0 sei die Menge aller Punkte aus B, die von P die Distanz $(d'-a)$ haben. B_0 liegt einschließlich seines Randes im Inneren von B[30]) und geht bei der Abbildung von B auf B' in

[30]) Folgt aus der Stetigkeit der Distanzfunktion.

einen abgeschlossenen, ebenfalls im Inneren von B' liegenden Bereich B_0' über. Aus der Definition von B_0 folgt, daß es wegen der Invarianz der Distanzfunktion gegenüber analytischen Abbildungen keine Punkte aus B' geben kann, die außerhalb von B_0' liegen und eine kleinere Distanz von P' haben als (d'+a).

Das ist aber ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß d' die minimale Randdistanz von P' sei.

Also ist $d \leqq d'$. Da die inverse Transformation von B' auf B existiert, läßt sich umgekehrt zeigen, daß d auch nicht kleiner als d' sein kann. Folglich ist notwendig $d = d'$.

Aus diesem Satz ergibt sich fast unmittelbar ein Satz von Thullen[31]). Es sei nämlich B ein Bereich, der den Voraussetzungen genügt, daß sich jeder Punkt in jeden anderen transformieren läßt. Wir behaupten nun, daß B mit dem Existenzbereich B* der Distanzfunktion von B identisch ist.

Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es im Inneren von B* einen Randpunkt P von B, d. h. — da $D_B(Q,P)=D_B{}^*(P,Q)$, also $\lim_{Q=P} D_B(Q,P) = O$ — daß die minimale Randdistanz eines Punktes Q aus B beliebig klein wird, falls Q sich dem Randpunkte P nähert. Das ist aber nicht möglich, da nach Satz 16 alle Punkte aus B die gleiche (von Null verschiedene) minimale Randdistanz besitzen müssen. Es gilt somit:

Satz 17. Läßt sich in einem Bereich B jeder innere Punkt in jeden anderen inneren Punkt von B durch eineindeutige und analytische Transformationen von B auf sich überführen, so ist B mit dem Existenzbereich seiner Distanzfunktion identisch, also ein Regularitätsbereich.

---

31) Vgl. Thullen, Math. Ann. 105.

Literaturverzeichnis.

H. Behnke, Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen: Natürliche Grenzen, Hamburger Abhandlungen 4.

B. Almer, Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes, Arkiv fär matematik 17.

H. Cartan, Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes. Bll. de la société mathématique. 1931.

H. Cartan, Les fonctions de deux variables complexes etc., Journ. d. math. (10), 9, 1931.

H. Cartan und P. Thullen, Zur Theorie der Singularitäten d. Funktionen zweier kompl. Veränderl. Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Während des Druckes erschienen in Math. Ann. 106 (1932).

C. Carathéodory, Ueber das Schwarzsche Lemma bei analytischen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Math. Ann. 97 (1927).

C. Carathéodory, Ueber die Geometrie der analytischen Abbildungen usw., Hamb. Abh. 6.

P. Thullen, Zur Theorie der Singularitäten usw.: Die Regularitätshüllen. Math. Ann. 106 (1932).

P. Thullen, Die Starrheit der nicht überall pseudokonvexen Bereiche. Math. Ann. 104 (1931).

G. Julia, Sür les familles des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, Acta math. 47 (1926).

Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie 2 (1929).

Während des Druckes erschien: H. Behnke - P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplezen Veränderlichen. Berlin, 1934.

Lebenslauf.

Am 26. September 1908 wurde ich, Helmut Horstmann, evangelischer Konfession, als Sohn des Kaufmanns Ewald Horstmann und seiner Ehefrau Gertrud, geb. Küchler-Devrient, in Erfurt geboren. Von Ostern 1918 bis Ostern 1927 besuchte ich das Bismarck-Realgymnasium zu Dortmund. Nach bestandenem Abitur studierte ich an den Universitäten Marburg (S.S. 1927 — S.S. 1928), Berlin (W.S. 1928/29 und S.S. 1929) und seit dem W.S. 1929/1930 in Münster i. W. reine und angewandte Mathematik und Physik. Ich nahm an den mathematischen Seminaren der Professoren Dr. Neumann-Marburg, Dr. Bieberbach-Berlin und Dr. Behnke-Münster teil. Seit Ostern 1931 war ich Mitglied des Oberseminars von Herrn Prof. Dr. Behnke, dem ich für meine wissenschaftliche Ausbildung und die Anregung zu dieser Arbeit zu danken habe. Ferner habe ich noch besonders der Studienstiftung des Deutschen Volkes zu danken, die mir die Durchführung meines Studiums und die Fertigstellung dieser Arbeit ermöglichte.